



**三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分。解答应写出演算步骤和必要的文字说明）**

11. 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left\{ \ln \left( 2 + \frac{1}{n} \right) - \ln 2 \right\}$ .

12. 计算不定积分  $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ .

13. 设函数  $y = \sin^2 \left( \frac{1}{x} \right) - 2^x$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ .

14. 函数  $y = y(x)$  是由方程  $e^y = \sqrt{x^2 + y^2}$  所确定的隐函数, 求  $\frac{dy}{dx}$  在点  $(1, 0)$  处的值.

15. 计算定积分  $\int_0^1 \ln(\sqrt{1+x^2} + x) dx$ .

16. 求二重积分  $\iint_D xy^2 d\sigma$ , 其中积分区域  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$ .

17. 设函数  $z = x \arctan \frac{x}{y}$ , 求  $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right|_{\substack{x=1 \\ y=1}}$ .

18. 求微分方程  $y' \tan x = y \ln y$  满足初始条件  $y|_{x=\frac{\pi}{6}} = e$  的特解.

**四、综合题（本大题共 2 小题，第 19 小题 14 分，第 20 小题 8 分，共 22 分）**

19. 已知函数  $f(x)$  是  $g(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2$  在  $(-\infty, +\infty)$  上的一个原函数, 且  $f(0) = 0$ . (1)

求  $f(x)$ ;

(2) 求  $f(x)$  的单调区间和极值;

(3) 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin^4 t dt}{f(x)}$ .

20. 设  $f(x)$ ,  $g(x)$  都是  $(-\infty, +\infty)$  上的可导函数, 且  $f'(x) = g(x), g'(x) = f(x), f(0) = 1, g(0) = 0$ . 试证:  $f^2(x) - g^2(x) = 1, x \in (-\infty, +\infty)$ .

