

8. 若二元函数 $z = f(x, y)$ 的全微分 $dz = e^x \sin y dx + e^x \cos y dy$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ _____.

9. 设平面区域 $D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1\}$, 则 $\iint_D x dx dy =$ _____.

10. 已知 $\int_1^t f(x) dx = t \sin \frac{\pi}{t} (t > 1)$, 则 $\int_1^{+\infty} f(x) dx =$ _____.

三、计算题 (本大题共 8 小题, 每小题 6 分, 共 48 分)

11. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{x^2}$.

12. 设 $y = \frac{x^x}{2x+1} (x > 0)$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

13. 求不定积分 $\int \frac{2+x}{1+x^2} dx$.

14. 计算定积分 $\int_{-\frac{1}{2}}^0 x \sqrt{2x+1} dx$.

15. 设 $x - z = e^{xyz}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

16. 计算二重积分 $\iint_D \ln(x^2 + y^2) d\sigma$, 其中平面区域 $D = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.

17. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 满足 $0 \leq a_n < b_n$, 且 $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)^4}{3n^4 + 2n - 1}$, 判定级数

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛性.

18. 设函数 $f(x)$ 满足 $\frac{df(x)}{de^{-x}} = x$, 求曲线 $y = f(x)$ 的凹凸的区间.

四、综合题 (本大题共 2 小题, 第 19 小题 10 分, 第 20 小题 12 分, 共 22 分)

19. 已知连续函数 $\varphi(x)$ 满足 $\varphi(x) = 1 + x + \int_0^x t \varphi(t) dt + x \int_x^0 \varphi(t) dt$

(1) 求 $\varphi(x)$;

(2) 求由曲线 $y = \varphi(x)$ 和 $x = 0, x = \frac{\pi}{2}$ 及 $y = 0$ 围成的图形绕 x 轴旋转所得立体的体积.

20. 设函数 $f(x) = x \ln(1+x) - (1+x) \ln x$.

(1) 证明: $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内单调减少;

(2) 比较数值 2018^{2019} 与 2019^{2018} 的大小, 并说明理由;

