

机密★启用前

广东省 2020 年普通高等学校本科插班生招生考试

高等数学

一、单项选择题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分。每小题只有一个选项符合题目要求)

1. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} [\cos x - f(x)] = 1$

, 则下列等式正确的是 ()

A. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

B. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \cos x = 1$

C. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$

D. $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + \cos x] = 1$

2. 函数 $f(x) = 2x^3 - 3x^2$, 其极小值点为 ()

A. $x = -1$

B. $x = 0$

C. $x = 1$

D. $x = 2$

3. 已知 3^x 是 $f(x)$ 的其中一个原函数, 则 $f(x) =$ ()

A. 3^x

B. $3^x \ln 3$

C. $x3^{x-1}$

D. $\frac{3^x}{\ln 3}$

4. 设平面区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$, 则 $\iint_D (x^2 + y^2)^4 d\sigma =$ ()

A. $\frac{\pi}{10}$

B. $\frac{\pi}{9}$

C. $\frac{\pi}{5}$

D. $\frac{2\pi}{9}$

5. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 满足 $0 \leq a_n \leq \frac{1}{5^n}$, 则下列级数发散的是 ()



A. $\sum_{n=1}^{\infty} 3a_n$

B. $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+3}$

C. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}})$

D. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - \frac{1}{\sqrt{n^3}})$

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

6. 若函数 $f(x) = \begin{cases} (1+a)x^2, & x \leq 1 \\ a(x-2)^3 + 3, & x > 1 \end{cases}$, 在 $x=1$ 处连续, 则常数 $a =$ _____.

7. 曲线 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 3$ 在点 $(2, -1)$ 处切线方程 $y =$ _____.

8. 微分方程 $y' + 3y' - 4y = 0$ 的通解为 $y =$ _____.

9. 设二元函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的某个领域有定义, 且当 $x \neq 0$ 时, $\frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 3x + 2$, 则 $f'_x(0, 0) =$ _____.

10. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 内可导, 且满足 $f(x) = f'(x)$, $f(0) = m$, 如果 $\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{e^x} dx = 8$, 则 $m =$ _____.

三、计算题 (本大题共 8 小题, 每小题 6 分, 共 48 分)

11. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t \arctan t dt}{x^3}$.

12. 已知函数 $y' = \ln \sqrt{x} + \sqrt{\ln x} + 2 \ln 2$, 求 $\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{x=e}$.

13. 计算不定积分 $\int (\cos 2x - x \sin x^2) dx$.

14. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{1+x^2}, & x \leq 1 \\ x, & x > 1 \end{cases}$, 求 $\int_{-3}^0 f(x+2) dx$.



15. 二元函数 $z = f(x,y)$, 其中 $z = 3xy^2 + \frac{x^2}{y}$, 求 $dz, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

16. 计算二重积分 $\iint_D y d\sigma$, 其中 D 由直线 $y = x, y = x - 2, y = 0, y = 2$ 围成的有界闭区域.

17. 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2 x}{y^2}$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 1$ 的特解.

18. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n n!}$ 的收敛性.

四、综合题 (本大题共 2 小题, 第 19 小题 10 分, 第 20 小题 12 分, 共 22 分)

19. 设有界平面图形 G 由曲线 $y = e^{ax}$ 和直线 $y = e, x = 0$ 围成, 其中常数 $a > 0$, 若 G 的面积等于 1,

- (1) 求 a 的值;
- (2) 求 G 绕 y 轴旋转一周而成的旋转体的体积.

20. 设函数 $f(x) = \frac{a}{1+e^{bx}}$, 其中 a, b 为常数, 且 $ab \neq 0$, 求

- (1) 判别 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, \infty)$ 内的单调性;
- (2) 曲线 $y = f(x)$ 的拐点;
- (3) 求曲线 $y = f(x)$ 的水平渐近线方程.

